Epreuve de Mathematiques
Proposition de corrections

Exercice 1

1) Soit Ω l'univers :
$\text{card}(\Omega) = C_{12}^{2} \times C_{15}^{1} = 990$ 0,25

- Probabilité qu'un seul des trois billets est gagnant
Soit A évènement

$\text{Card } A = C_4 \times C_8^1 \times C_8^2 + C_8^2 \times C_5^1 = 320 + 140 = 460$

$P(A) = \frac{\text{Card} A}{\text{Card} \Omega} = \frac{46}{99} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{46}{99}}$ 0,5

2) La Probabilité que 2 au moins des 3 billet soient gagnant. Soit B évènement

$$P(B) = \frac{C_4^2 \times C_{10}^1 + C_4^1 \times C_8^1 \times C_5^1 + C_4^2 \times C_5^1}{990}$$

$\boxed{P(B) = \frac{25}{99}}$ 0,5

3/ a Valeurs prises par X.
$X \in \{0; 5000; 7500; 10000\}$ 0,25

b/ loi de Probabilité

$P(X=0) = \frac{C_8^2 \times C_{10}^1}{990} = \frac{280}{990} = \frac{28}{99}$ 0,25

$P(X=2500) = \frac{C_4^1 \times C_8^1 + C_{10}^1}{990} = \frac{320}{990} = \frac{32}{99}$ 0,25

$P(X=5000) = \frac{C_8^2 \times C_5^1 + C_4^2 \times C_{10}^1}{990} = \frac{140+60}{990} = \frac{20}{99}$ 0,25

$$P(X=7500)=\frac{C_4^1\times C_8^1\times C_5^1}{990}=\frac{160}{990}=\frac{16}{99}\quad 0{,}25$$

$$P(X=10000)=\frac{C_4^2\times C_5^1}{990}=\frac{30}{990}=\frac{3}{99}\quad 0{,}25$$

x	0	2500	5000	7500	10000
$P(X=x)$	$\frac{28}{99}$	$\frac{32}{99}$	$\frac{20}{99}$	$\frac{16}{99}$	$\frac{3}{99}$

* l'espérance mathématique

$$E(X)=\frac{28}{99}\times 0+\frac{32}{99}\times 2500+\frac{20}{99}\times 5000+\frac{16}{99}\times 7500+\frac{3}{99}\,10000$$

$$E(X)=\frac{330000}{99}\Rightarrow \boxed{E(X)=\frac{10000}{3}}\quad 0{,}25$$

* La Variance $V(X)$ de X

$$V(X)=\frac{28}{99}\times 0^2+\frac{32}{99}\times 25000^2+\frac{20}{99}\times 5000^2+\frac{16}{99}\times 7500^2+$$

$$\frac{3}{99}\times 10000^2-\left(\frac{10000}{3}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{8.10^8}{99}\quad 0{,}25$$

* L'ecart-type

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{2\sqrt{2}\times 10^4}{3\sqrt{11}}$$

$$\boxed{\sigma(X)=\frac{2\sqrt{22}\times 10^4}{33}}\quad 0{,}25$$

Exercice 2

$f(z) = -\frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$ et $F : P - \{O\} \to P\setminus\{O\}$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = f(z)$.

1) $z = re^{i\theta}$; $r \in \mathbb{R}^*_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Expression du module et argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.

$|f(z)| = \left|-\frac{1}{z}\right| = \frac{|-1|}{|z|}$; $\arg(f(z)) = \arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \arg(-1) - \arg(z)$

$$\begin{cases} |f(z)| = \frac{1}{r} \\ \arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \arg(f(z)) = \pi - \theta \end{cases}$$ 1

2) $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'affixe du milieu I de [MM'].

a) Expressions de X et Y en fonction de x et y.

$$Z = \frac{z+z'}{2} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} = \frac{x+iy - \frac{1}{x+iy}}{2} = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} + i\frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}$$

$$\Rightarrow X + iY = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} + i\frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)}$$

alors :

$$\begin{cases} X = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2(x^2+y^2)} \\ Y = \frac{y(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} \end{cases}$$ 1

b) Déterminons et représentons l'ensemble $(\mathcal{E})$

$I \in (O, \vec{u}) \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow \frac{y(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2)} \Rightarrow y = 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$ car $x^2+y^2+1 \neq 0$

Donc (E) est l'axe $(O; \vec{u})$ privé de O. 0,1

c) Déterminons et représentons l'ensemble (F)

$I \in (O; \vec{v}) \Rightarrow X = 0 \Rightarrow \frac{x(x^2+y^2+1)}{2(x^2+y^2)} \Rightarrow x = 0$ ou $x^2+y^2=1$

et $(x;y) \neq (0;0)$.

Donc (F) est la réunion de l'axe $(O; \vec{v})$ privé de O et du cercle de centre O et de rayon 1. 0,1

3) $|z| = 1$; $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \mathbb{R}$

a) calcul de z en fonction θ

$z = \frac{e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}}{2} = \frac{i(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i} = i\sin\theta$ 0,1

b) si M ∈ du cercle de centre O et de rayon 1 ; alors $|z| = OM = 1$ et donc $z = e^{i\theta}$ et $z' = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \bar{z}$

alors la restriction de F au cercle de centre O est le rayon 1 est la symétrie d'axe $(O; \vec{u})$ 0,1

A

Problème

1°a) L'ensemble de définition $g(x) = 1 + x(2\ln|x| + 1)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; ou $\mathbb{R}^*$ 0,2

sur $]-\infty; 0[$; $g(x) = 1 + x(2\ln(-x) + 1)$

sur $]0; +\infty[$, $g(x) = 1 + x(2\ln(x) + 1)$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + x(2\ln(-x) + 1) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty}$ 0,2✓

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + x(2\ln(-x)+1) \; \lim_{x\to 0^-} 1 + 2x\ln(-x) + x$

Posons $X = x \Rightarrow x = -X$ $x \to 0^-$; $X \to 0^+$

$\lim_{X\to 0^+} 1 - X\ln X - X = 1$ car $\begin{cases} \lim_{X\to 0^+} X\ln X = 0 \\ \lim_{X\to 0^+} 1 - X = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^-} g(x) = 1}$ 0,2✓

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + x(2\ln(+x)+1) = \lim_{x\to 0^+} 1 + 2x\ln(x) + x$

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1}$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} 1 + x = 1 \end{cases}$

0,2✓

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 1 + x(2\ln(x)+1) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \ln(x) + 1 = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$ 0,2✓

2°a) g est derivable sur $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = \left(1 + x(2\ln|x| + 1)\right)'$

$\boxed{g'(x) = 2\ln|x| + 3}$ 0,1✓

b) Dressons le Tableau de variation de g.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln|x| + 3 = 0 \quad \ln|x| = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow |x| = e^{-\frac{3}{2}}$

$\begin{cases} x = e^{-\frac{3}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -e^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-e^{-3/2}$		0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

0,25

$\forall x \in]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}[\cup]e^{-\frac{3}{2}} ; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}[\cup]e^{-\frac{3}{2}} ; +\infty[$.

$\forall x \in]-e^{-\frac{3}{2}} ; 0[\cup]0 ; e^{-\frac{3}{2}}[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]-e^{-\frac{3}{2}} ; 0[\cup]0 ; e^{-\frac{3}{2}}[$.

x	$-\infty$		$-e^{-\frac{3}{2}}$		0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$1+e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$1 \Vert 1$	$\searrow$	$1-2e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

3-a) Calculons $g(-1)$

$g(-1) = 1 - 1(2\ln|-1| + 1) = 1 - 1(2 \times 0 + 1) = 1 - 1$

$\boxed{g(-1) = 0}$ 0,25

b) $g(]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}]) =]-\infty ; 1 + e^{-\frac{3}{2}}[$ 0,25

c) h est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}]$ et $h(]-\infty ; -e^{-\frac{3}{2}}]) =]-\infty ; 1 + e^{-\frac{3}{2}}]$ donc h est une bijection.

0,25

d) Comme $0 \in]-\infty ; 1 + e^{-\frac{3}{2}}]$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty ; 1 + e^{-\frac{3}{2}}[$.

~~Sur~~ $\forall x \in]-e^{-\frac{3}{2}} ; 0[$ $g(x) > 1$; donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans $]-e^{-\frac{3}{2}} ; 0[$

sur $]0;+\infty[$, g admet un minimum positif, donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans $]0;+\infty[$. 0,2

C/C : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution.

4) $\forall x \in]-\infty ; -1[$ $g(x) < 0$ car $g(x) < g(1) \Rightarrow g(x) < 0$

$\forall x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $g(x) > 0$ $g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 0$

0,2

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = x(x\ln|x|+1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Démontrons que f est continue en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x(x\ln x + 1)$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\ln x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \end{cases}$

Par analogie $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow$ 0,2

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

2°) a) $Df = \mathbb{R}$ 0,2

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x(x\ln(-x)+1) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x\ln(-x) = -\infty \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$ 0,2

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(x\ln(x)+1) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty \end{cases}$

b) Etudions la dérivabilité en 0 (5)

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(x\ln(-x)+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x\ln(-x)+1$

Posons $X=-x$; $x=-X \Rightarrow \lim\limits_{X\to 0} -X\ln X+1 = 1$ car $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$
$\begin{cases} x\to 0^- \\ X\to 0^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'_g(0) = 1$ 0,✓

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)+1$

$= 1$ car $\left\{ \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \right.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'_d(0) = 1$

$f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ donc f est dérivable en 0.

c) calcule de $f'(x)$; sens de variation de f ; et tableau de variation de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = (x(x\ln|x|+1))' = (x^2\ln|x|+x)' = (2x\ln|x| + \frac{1}{x}\times x^2)+1$

$= (2x\ln|x| + \frac{1}{x}) + 1 = 1 + x(2\ln|x|+1)$

$\Rightarrow \underline{f'(x) = g(x)}$ 0,1✓

$\forall x\in]-\infty; 1[$; $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

$\forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[$; $g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$; $f(-1) = 1$ 0,✓

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
f	$+\infty$		-1		0		$+\infty$

1,0

3°a) Équation de la tangente (D) à (C) au point O.

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Rightarrow$ i.e $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$\Rightarrow$ (D) : $y = x$ 0,2

b) Les abscisses des points d'intersection de (D) avec (C) sont les solutions de l'équation $f(x)=x$

$f(x)=x \Leftrightarrow x^2\ln|x|+x=x \Leftrightarrow x^2\ln|x|+x-x=0$

$\Leftrightarrow x^2\ln|x|=0 \Leftrightarrow x^2\ln|x|=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=0$

0,1

$f(x)=x$ admet donc 3 solutions (dont l'une $x=0$) était évident) donc (C) coupe (D) en deux autres points (autre que O) ; $E(1;f(1)) \Rightarrow E(1;1)$; $F(-1;f(-1)) \Rightarrow F(-1;-1)$

c) Étudier la position de (C) par rapport à (D).

$f(x)-y = x^2\ln|x|$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

1,0

$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)-y>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

$\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $f(x)-y<0$ donc (C) est au-dessous de (D).

$\forall x \in]-1;1[$, $f(x)-y<0$ donc (C) est au-dessous de (D) ⑥

4°) Sur $]-\infty;-1$; f est continue car dérivable et strictement décroissante sur I donc elle réalise une bijection de $]-\infty;-1[$ vers $]-1;+\infty[$ or ~~$0\in]-1;$~~ $0\in]-1;+\infty[$ donc (C) coupe (OI) en un point abscisse $\beta \in]-\infty;-1[$. 1 W

Comme $f(-1,8)\times f(-1,7)<0$ donc $-1,8<\beta<-1,7$

Partie C:

1) intégrale par parties

Posons $u=\ln x \longrightarrow u'=\frac{1}{x}$

$v'=x^2 \longrightarrow v=\frac{1}{3}x^3$

$\int_\alpha^1 x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\alpha^1-\int_\alpha^1\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}x^3\right)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\alpha^1-\frac{1}{3}\int_\alpha^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_\alpha^1-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^1$

$\int_\alpha^1 x^2\ln x\,dx=\frac{1}{9}(3a^2\ln\alpha+a^3-1)$ 1

2°) a) Remarquons que sur $]0,1[$, (D) est au-dessus de (C) et que l'unité d'aire est $5cm\times5cm=25cm^2$

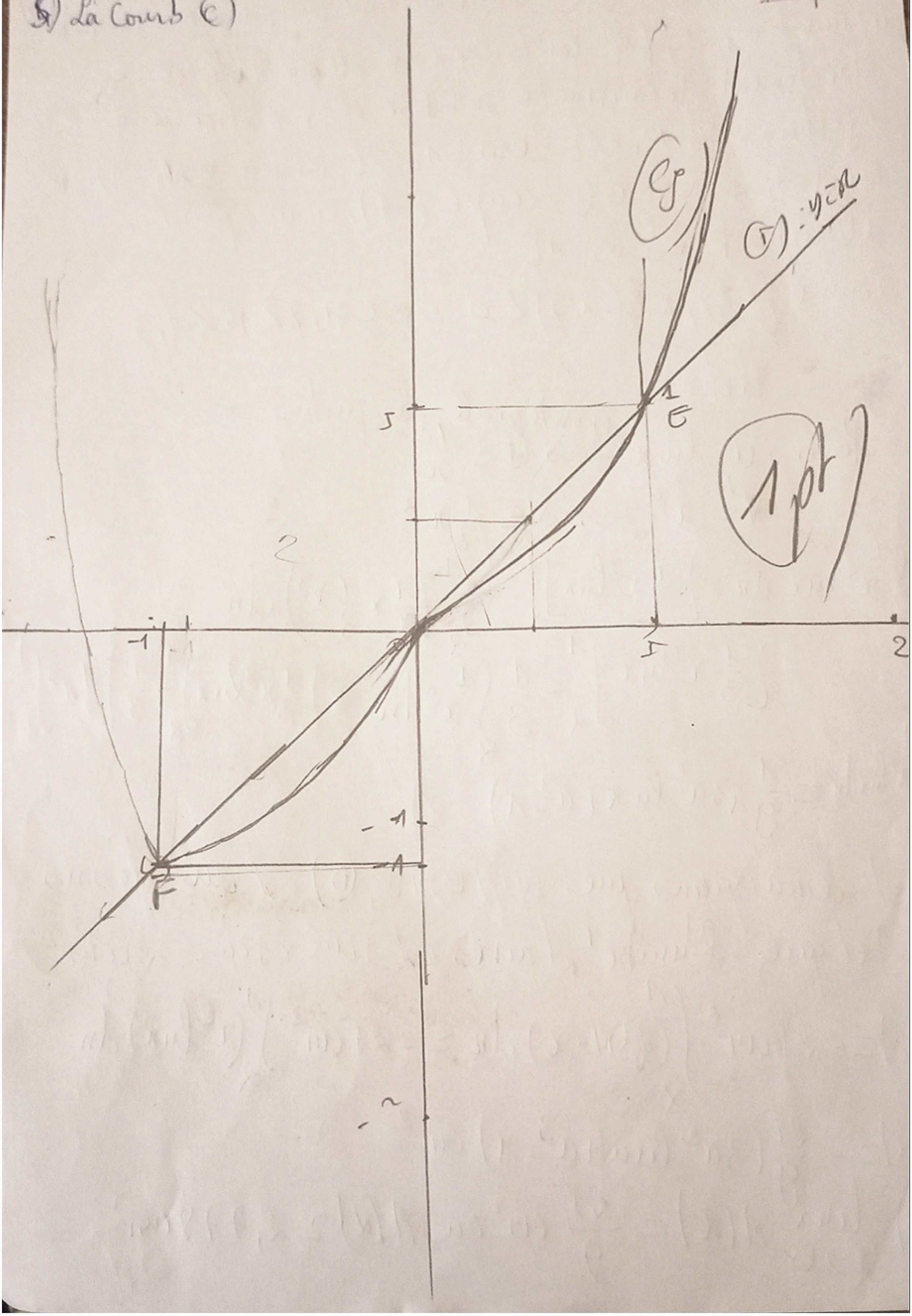
$A(\alpha)=-25cm^2\int_\alpha^1(f(x)-x)\,dx=-25cm^2\int_\alpha^1(x^2\ln x)\,dx$ 0 W

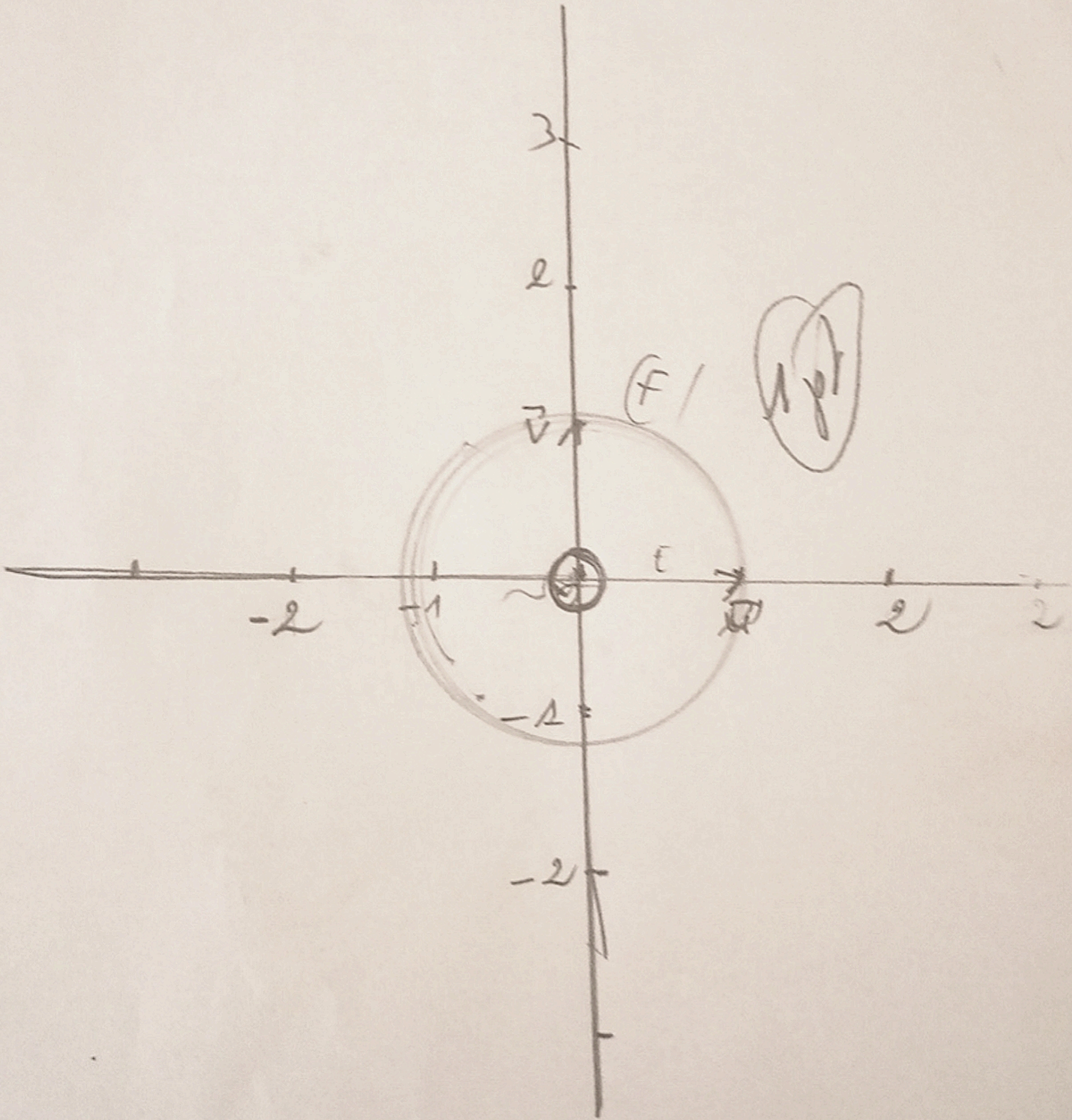
$A(\alpha)=-\frac{25}{9}(3a^2\ln a+a^3-1)\,cm^2$

b) $\lim_{\alpha\to0}A(\alpha)=\frac{25}{9}cm^2$ ou $A(\alpha)\simeq2,778\,cm^2$

0 W

5) La Courb (C)





3
2
-2
-1
2
-1
-2
1 pt