EPREUVE de Mathématiques

Proposition de correction

Exercice 1

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$

1- Calculons $P(-1)$

$P(-1) = 2(-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) - 2$

$P(-1) = -2 - 1 + 5 - 2$

$P(-1) = 0$ (0,25pt) 0,25pt

2) Déterminons le réel α pour que : $P(x) = (x+1)(2x^2 + \alpha x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - 3x^2 - 2 \\ \cline{1-1} - 3x^2 - 5x & \\ +3x^2 + 3x & \\ \cline{1-1} 0 - 2x - 2 & \\ +2x + 2 & \\ \cline{1-1} 0 \quad 0 & \end{array}$$

Donc $\alpha = -3$

$\Rightarrow P(x) = (x+1)(2x^2 - 3x - 2)$ 0,5pt

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$, ~~chacune~~

$P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 3x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1) = 0$ et $(2x^2 - 3x - 2) = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-2)$

$\Delta = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{3-5}{4}$; $x_2 = \frac{3+5}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = 2$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x + \frac{1}{2})(x-2) = 0$

$x = -1$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = 2$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; -\frac{1}{2} ; 2\}}$ 0,75pt

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes.

a) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$

$D_V =]0 ; +\infty[$

Posons $X = \ln x$

l'équation devient

$2X^3 - X^2 - 5X - 2 = 0$ or

$2(X+1)(X + \frac{1}{2})(X-2) = 0$

$X = -1$; $X = -\frac{1}{2}$; $X = 2$

- Pour $X = -1$

$\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

- Pour $X = -\frac{1}{2}$

$\ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

- Pour $X = 2 \Rightarrow$

$\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$

$S_{\mathbb{R}} = \{e^{-1} ; e^{-\frac{1}{2}} ; e^2\}$ 1,5pts

b) $2e^{2x} - e^x - 5 - 2e^{-x} = 0$

$2e^{2x} - e^x - 5 - \frac{2}{e^x} = 0$

$$\frac{2e^{3x}-e^{2x}-5e^{x}-2}{e^{x}}=0$$

$2e^{3x}-e^{2x}-5e^{x}-2=0$ car $e^{x}\neq 0$

Posons $X=e^{x}$

l'équation devient

$2X^3-X^2-5X-2=0$

$2(X+1)(X+\frac{1}{2})(X-2)=0$

$e^{x}=-1$ impossible

$e^{x}=-\frac{1}{2}$ impossible

$e^{x}=2 \Leftrightarrow \ln e^{x}=\ln 2$

$\Rightarrow x=\ln 2$

$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{\ln 2\}}$ 1 pts

Exercice 2

augmente de 40% = 0,4

$L_0=10$

1) calculons L_1 ; L_2.

. $L_1=L_0+\frac{40}{100}\times L_0=10+\frac{40}{100}\times 10$

$\boxed{L_1=14}$ 0,5

. $L_2=L_1+\frac{40}{100}\times L_1=14+\frac{40}{100}\times 14$

$\boxed{L_2=19,6}$ 0,5pt

2-a) Exprimons L_{n+1} en fonction L_n.

La longueur d'un boa augmente de 40% chaque année.

Donc $L_{n+1}=L_n+\frac{40}{100}L_n$

$=L_n(1+\frac{40}{100})$

$=(1+0,4)L_n$

$\boxed{L_{n+1}=1,4L_n}$ 1pt

b) déduisons que (L_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.

on $L_{n+1}=1,4L_n$ donc (L_n) est une suite géométrique de raison 1,4 et 1er terme $L_0=10$. 1pt

b) Donnons l'expression de L_n en fonction de n.

$L_n=L_0 q^n \Rightarrow \boxed{L_n=10(1,4)^n}$ 1pt

3°) Au bout de 10 ans, n = 10

$L_{10}=10(1,4)^{10}=$

$\boxed{L_{10}=289,25}$ 1pt

Sa longueur au bout de 10 ans est 289,25 cm soit 2,8925 m

$x_0 = 2$

$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$f'(2) = \dfrac{(2)^3 - 1 + \ln 2}{(2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{8 - 1 + \ln 2}{4}$

$f'(2) = \dfrac{\cancel{7} + 0,7}{4}$

$f'(2) = 1,9 \simeq 2$

$f(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - \dfrac{\ln 2}{2}$

$= 0,5(4) - \dfrac{0,7}{2}$

$f(2) = 2 - 0,35$

$f(2) = 1,6$

$\Rightarrow (T:): y = 1,9(x-2) + 1,6:$

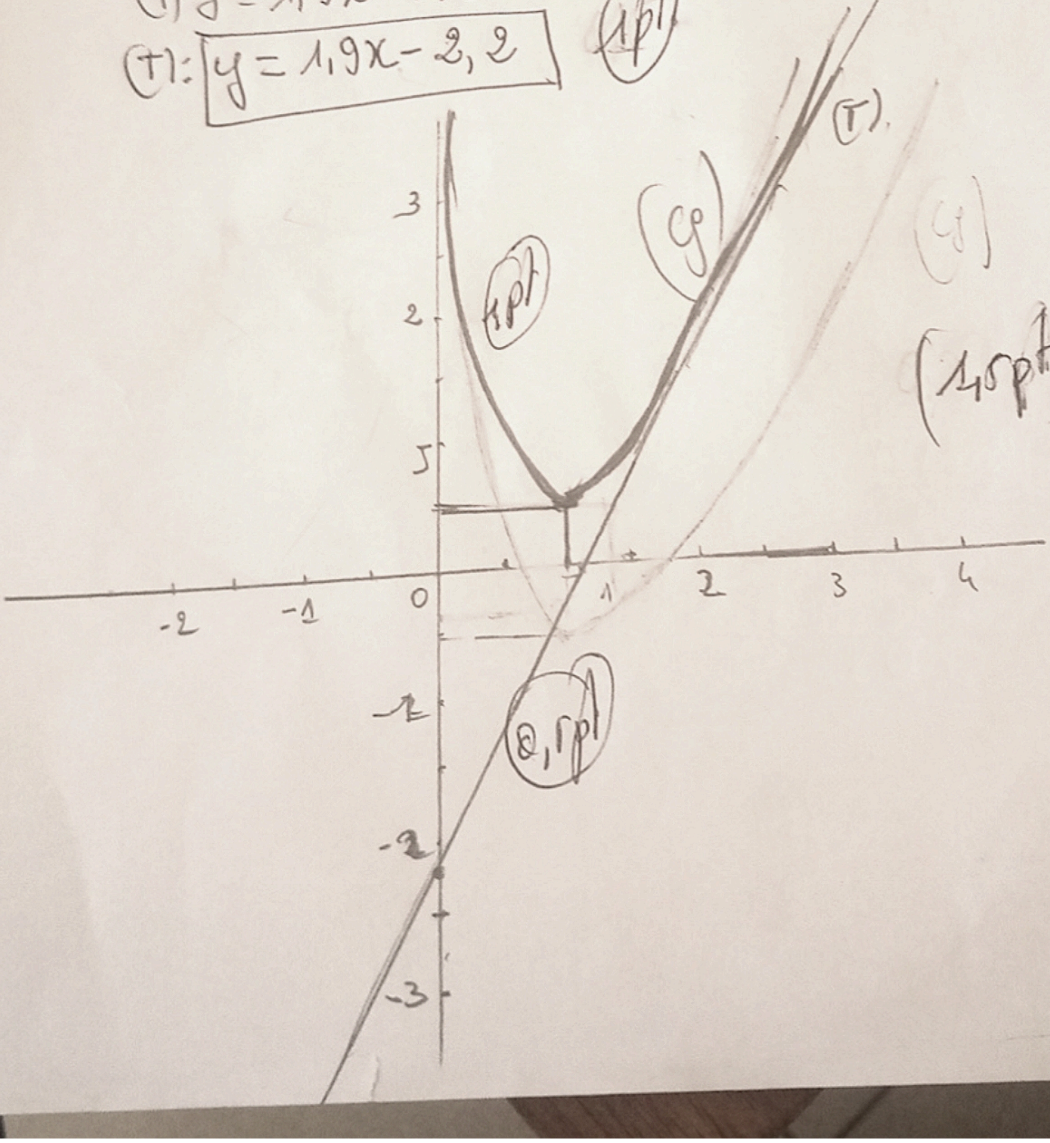
$(T)\ y = 1,9x - 3,8 + 1,6$

$(T): \boxed{y = 1,9x - 2,2}$

(1pt)

(T):

x	y
0	-2,2
1	-0,3



(1,5pt)
(1 pour C)
0,5 pour (T)

4) Comme $1m = 100cm$, il suffit de résoudre l'inéquation

$10\times(1,4)^n \geq 100 \Leftrightarrow (1,4)^n \geq 10$

$\Leftrightarrow n\ln(1,4) \geq \ln 10$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 10}{\ln 1,4}$

$\Leftrightarrow n \geq 7$ (1pt)

Donc le boa dépassera un mètre à partir de 7ans.

Problème

1) soit $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$ définie sur $]0 ; +\infty[$

a) limites aux bornes de D_g

• $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^3 - 1 + \ln x = -\infty$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^3 - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$ (0,5pt)

• $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - 1 + \ln x$

$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ (0,5pt)

b) Etudions le sens de variation et Dresser le tableau de variation de g.

• Dérivée

g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = (x^3 - 1 + \ln x)'$

$= 3x^2 + \dfrac{1}{x}$

$\boxed{g'(x) = \dfrac{3x^3 + 1}{x}}$ (1pt)

• sens de variation

$\forall x \in]0;+\infty[$; $\dfrac{3x^3+1}{x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ d'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (0,5pt)

• Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
g	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(0,5pt)

c) calculons $g(1)$

$g(1) = (1)^3 - 1 + \ln 1$

$g(1) = 1 - 1 + 0$

$g(1) = 0$ (0,5pt)

Justifions

• $\forall x \in]0;1[$, $g(x) < 0$ car $g(x) < g(1)$ (0 est un maximum)

• $\forall x \in]1;+\infty[$; $g(x) > 0$ car $g(x) > g(1)$ (0 est le minimum). (0,5pt)

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x}$

a) Déterminons les limites de f en 0 et $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\times\ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$ (0,5pt)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$ (0,5pt)

b) Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$= x - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^2} \text{ or}$$

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$ (1pt)

$\forall x \in]0;+\infty[$; $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

Or $\forall x \in]0;1[$; $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]0;1[$ (1pt)

$\forall x \in]1;+\infty[$; $g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

(1pt)

$$f(1) = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{\ln(1)}{1}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$$

c) Déterminons l'équation (T) à (C) au point d'abscisse 2

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$