Proposition de correction

Première Partie : (10 pts)

I - d ; II - c ; III - c ; IV - c
0,5pt ; 0,5pt ; 1pt ; 0,5pt

V - Soit $x = \sqrt{2} - 5$ et $y = 3 + a$

Calculons a pour que x et y soient opposés

on a $x + y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 5 + 3 + a = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 2 + a = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{a = -\sqrt{2} + 2}$ 0,5pt

VI - Soit $(D) : y = -2x$ et $(\Delta) : y = bx + 3$

1- Le coefficient directeur de (D) est -2 0,5pt

2- Calculons b pour que $(D) \parallel (\Delta)$

$(D) \parallel (\Delta)$ signifie que $b = -2$ car deux droites parallèles ont le même coefficient directeur 0,5pt

3. Calculons b pour que $(D) \perp (\Delta)$

$(D) \perp (\Delta) \Rightarrow 2 \times b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$ [car deux droites perpendi si le produit de leur coefficient directeur est égale à -1 0,5

4- L'inverse de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est :
$b = \sqrt{2}$ 0,5pt

VII - On donne $a = 3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$

1. Trouvons le signe de a :

$(3\sqrt{5})^2 = 45$
$(5\sqrt{2})^2 = 50$
$\Leftrightarrow 45 < 50 \Leftrightarrow (3\sqrt{5})^2 < (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{5} < 5\sqrt{2}$

donc a est négatif $(a < 0)$. 1pt

2- Calculons a^2

$a^2 = (3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2$

$\boxed{a^2 = 95 - 30\sqrt{10}}$ 1pt

VIII. - On a $f(-1) = 3$ et $f(2) = -2$

Déterminons ~~de~~ f : $f(x) = ax + b$

$f(-1) = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$ ① ; $f(2) = -2 \Leftrightarrow 2a + b = -2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b = 3 \\ 2a+b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = -3 \\ 2a+b = -2 \end{cases} \Rightarrow 3a = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$

$-\left(-\frac{5}{3}\right) + b = 3 \Rightarrow b = 3 - \frac{5}{3} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$

donc $\boxed{f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}}$ 1,5 pts

IX. Trouvons le sens de variation en justifiant de h sur $\mathbb{R}$.

$h(3\sqrt{2}) = -2$ et $h(2\sqrt{5}) = -5$

$3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$ or $2 > -5 \Leftrightarrow h(3\sqrt{2}) > h(2\sqrt{5})$ donc h est strictement décroissante. 1pt

X. - La forme factorisée du polynôme :

$25x^2 + 10\sqrt{3}x + 3$ est :

c) $(5x + \sqrt{3})^2$ 0,5 pt

Deuxième Partie :

Exercice 1

I. On donne $Q(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-2)(5-x)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de Q.

Q existe si et seulement si $(x-2)(5-x) \neq 0$

$x \neq 2$ et $x \neq 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_Q = \mathbb{R} \setminus \{2;5\}}$ 0,5pt

2) Simplifions l'expression de $Q(x)$ sur D_Q

$$Q(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)(5-x)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(5-x)} = \frac{x+2}{5-x}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{Q(x) = \frac{x+2}{5-x} \text{ sur } D_Q}$ 0,5pt

3) Calculons si possible l'image de 5 par Q

- $Q(5)$ est impossible car $5 \notin D_Q$. 0,25pt
- Calculons l'antécedent de -2 par Q

On pose $Q(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{x+2}{5-x} = -2 \Leftrightarrow x+2 = -2(-x+5)$

$\Leftrightarrow x+2 = +2x-10$

$\Leftrightarrow x-2x = -10-2$

$\underline{\underline{x = 12}}$

Donc l'antécédent de -2 par Q est 12. 0,25pt

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$

- $Q(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{-x+5} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$\boxed{S = \{-2\}}$ 0,5pt

- $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{-x+5} \leq 0$

x	$-\infty$		-2		2		5		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$-$	

$\boxed{S_{\mathbb{R}} =]-\infty;-2] \cup]5;+\infty[}$

0,5pt

1 . 1 : Reproduisons le Tableau et complétons les lignes des fréquences en pourcentage et les centres de classes 2 pts

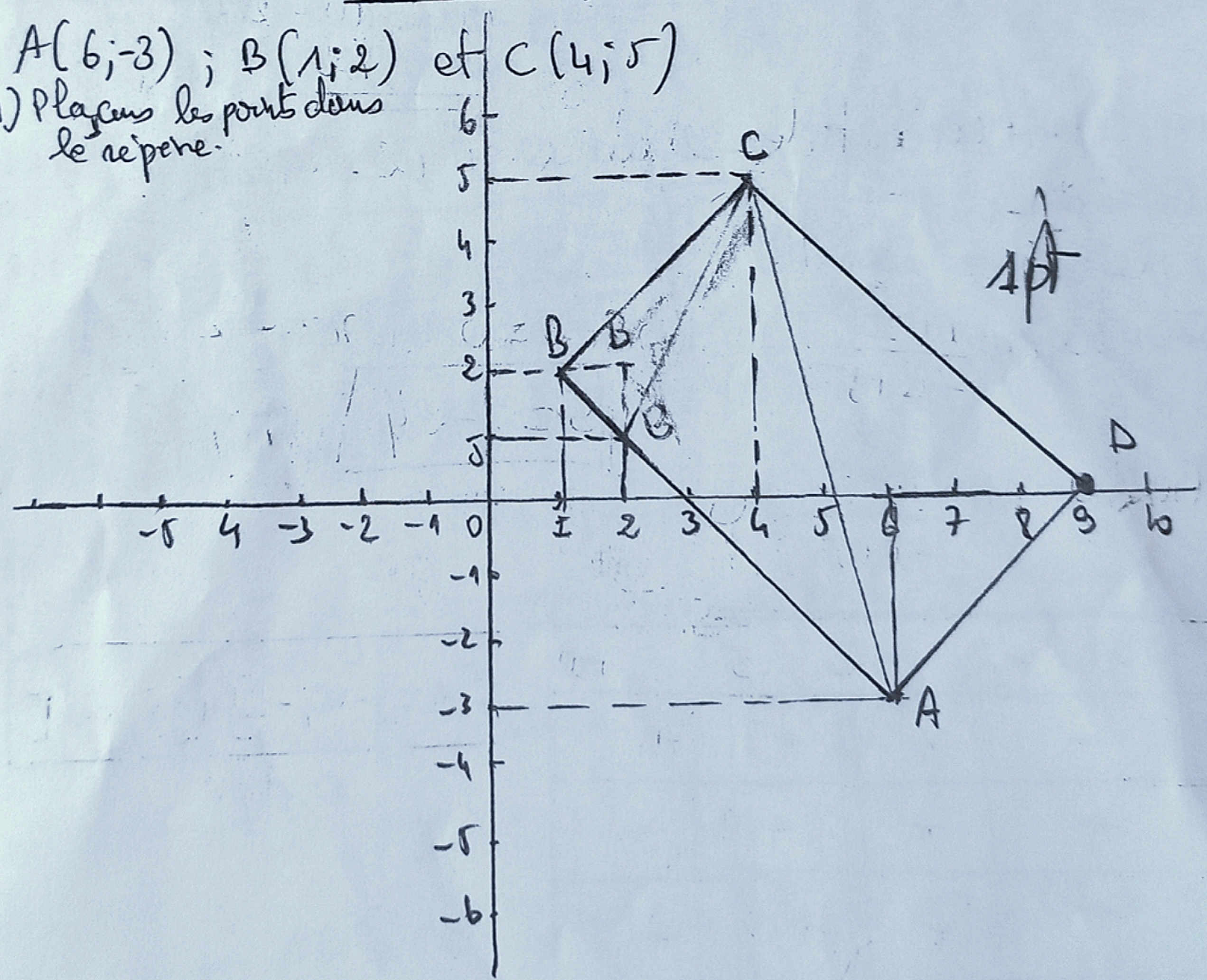
Age (année)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
Effectifs	80	40	10	30	15	250
Fréquence en % 1 pt	18,82	9,42	2,35	7,05	3,53	58,82
centre de classe 1 pt	5	15	25	35	45	55

2) La classe modale est [50 ; 60[. 0,5 pt.

Exercice 2

A(6 ; -3) ; B(1 ; 2) et C(4 ; 5)

1) Plaçons les points dans le repère.



2) Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$; $\vec{AC}$; $\vec{CB}$ 3

- $\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix} \mapsto \vec{AB}\begin{pmatrix}1-6\\ 2+3\end{pmatrix} \mapsto \boxed{\vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\ 5\end{pmatrix}}$ 0,25pt

- $\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\ y_C-y_A\end{pmatrix} \mapsto \vec{AC}\begin{pmatrix}4-6\\ 5+3\end{pmatrix} \mapsto \boxed{\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}}$ 0,25pt

- $\vec{CB}\begin{pmatrix}x_B-x_C\\ y_B-y_C\end{pmatrix} \mapsto \vec{CB}\begin{pmatrix}1-4\\ 2-5\end{pmatrix} \mapsto \boxed{\vec{CB}\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix}}$ 0,25pt

3) Calculons les distances AB ; AC ; CB

- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-5)^2+(5)^2}=\sqrt{50}=\sqrt{2\times 25}$

$\boxed{AB=5\sqrt{2}}$ 0,25pt

- $\vec{AC}=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-2)^2+(8)^2}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times 17}$

$\boxed{AB=2\sqrt{17}}$ 0,25pt

- $CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=\sqrt{2\times 9}$

$\cancel{CB=2\sqrt{3}}$ $\boxed{CB=3\sqrt{2}}$ 0,25pt

4) Montrons que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux

$x_{\vec{AB}}\cdot x_{\vec{BC}}+y_{\vec{AB}}\cdot y_{\vec{BC}}=(-5\times(-3))+(5\times(-3))=-15+15$

$x_{\vec{AB}}\cdot x_{\vec{BC}}+y_{\vec{AB}}\cdot y_{\vec{BC}}=0$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont orthogonaux 0,5pt

5-a) déduisons la nature du triangle ABC à partir de la question 3.

$AB^2=50$
$AC^2=68$ $\mapsto$ $AB^2+CB^2=50+18=68 \Rightarrow AB^2+CB^2=AC^2$
$CB^2=18$

donc d'après la réciproque du théorème 0,5pt de Pythagore ABC est un triangle rectangle en B.

b) A partir de la question 4,

on $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ donc ABC est un triangle rectangle en B

0,5pt

6) Déterminons les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_D = x_B - x_A \\ y_C - y_D = y_B - y_A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_D = 1 - 6 \\ 5 - y_D = 2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_D = -5 \\ 5 - y_D = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_D = -5 - 4 \\ -y_D = 5 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_D = -9 \\ -y_D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

Donc $D(9;0)$ 1pt