

Proposition de Corrigé B/H/D

Exercice 1

$$z_I = 2i$$

$$M': z' = iz$$

a) Nature de f et ses éléments caractéristiques.

$$f: M \rightarrow M(z); M(z) \rightarrow M'(z' = iz)$$

$$M' \rightarrow z' = iz$$

$$f: M' = \mathbb{R}(0; \frac{\pi}{2})(M)$$

Autrement

$$M' \rightarrow z' = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

$$z' - w = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - w)$$

$$w = 0 \Rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, d'où f est

une rotation de centre l'origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (0,5 pt)

b) Affixe de A' image de A par f

$$A' = \mathbb{R}(0; \frac{\pi}{2}) A$$

$$\Rightarrow z_{A'} = i^{\frac{\pi}{2}} z_A = i(-1 + \sqrt{2} + i)$$

$$\Rightarrow \underline{z_{A'} = -1 + (1 + \sqrt{2})i} \quad (0,5 \text{ pt})$$

c) Montrons que les points A, I et A' sont alignés.

1^{ère} méthode

A, I et A' sont alignés si

$$\vec{AI} = h \vec{AA'} \quad (h \in \mathbb{R})$$

$$\vec{AI} = 2i - (1 + \sqrt{2} + i)$$

$$\Rightarrow \vec{AI} = 2i - (1 + \sqrt{2}) - i$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{AI} = -(1 + \sqrt{2}) + i}$$

$$\vec{AA'} = -1 + (1 + \sqrt{2})i - 1 - \sqrt{2} - i$$

$$= -1 + i + \sqrt{2}i - 1 - \sqrt{2} - i$$

$$= -2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$= \sqrt{2}(-\sqrt{2} - 1 + i)$$

$$\vec{AA'} = \sqrt{2}[-(1 + \sqrt{2}) + i]$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{AA'} = \sqrt{2} \cdot \vec{AI}}$$

d'où A, I et A' sont alignés (0,5 pt)

2^e méthode

A, I et A' sont alignés si $\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{Im}\left(\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A}\right) = 0$$

$$\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} = \frac{2i - 1 - \sqrt{2} - i}{-1 + (1 + \sqrt{2})i - (1 + \sqrt{2}) - i}$$

$$\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) + i}{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) + i}{\sqrt{2}(-\sqrt{2} - 1 + i)}$$

$$\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} \in \mathbb{R} \text{ d'où les points}$$

I, A et A' sont alignés.

3^e méthode

4: I et A' sont alignés si

$$\arg\left(\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A}\right) = k\pi$$

$$\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| \frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Soit } \theta = \arg\left(\frac{z_I - z_A}{z_{A'} - z_A}\right)$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 + 2k\pi$$

d'où A, I et A' sont alignés.

2-a) Montrons que l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que

M, I et M' sont alignés est le cercle de centre O d'axe AA'

et de rayon $\sqrt{2}$

M, I et M' sont alignés (2)

$$\text{Si } \frac{z_I - z_M}{z_{M'} - z_M} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z_I - z_M}{z_{M'} - z_M} = \frac{w - z}{\lambda z - z} ; \text{ posons } z = x + iy$$

$$\text{et } Z = \frac{z_I - z_M}{z_{M'} - z_M}$$

$$Z = \frac{w - x - iy}{i(x + iy) - x - iy}$$

$$Z = \frac{-x + i(2-y)}{ix - y - x - iy} = \frac{-x + i(2-y)}{-x - y + i(x-y)}$$

$$Z = \frac{[-x + i(2-y)][(-x-y) - i(x-y)]}{[-(x+y)]^2 - [i(x-y)]^2}$$

$$Z = \frac{x^2 + xy + ix - xy - 2y + iy^2 + i(-x + iy - y + y^2)}{x^2 + 2xy + y^2 + n^2 - 2xy + y^2}$$

$$Z = \frac{n^2 + 2xy^2 - 2y + i(n^2 - 2xy^2 - 2y)}{2(n^2 + y^2)}$$

$$Z = \frac{n^2 + 2xy^2 - 2y}{2(n^2 + y^2)} + i \left(\frac{n^2 - 2xy^2 - 2y}{2(n^2 + y^2)} \right)$$

$$Z \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Im}(Z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 + 2xy^2 - 2y}{2(n^2 + y^2)} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

(Γ) est le cercle de centre O d'axe AA' et de rayon $\sqrt{2}$

b) vérifions que $A \in (\Gamma)$

$$A \in (\Gamma) \Rightarrow (x_A - 1)^2 + (y_A - 1)^2 = 2$$

$$A(1 + i\sqrt{2}; 1)$$

$$(1 + i\sqrt{2} - 1)^2 + (1 - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

d'où $A \in (\Gamma)$ (0,25pt)

c) déterminons l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque M décrit (Γ) .

lorsque M décrit (Γ)

$$\text{alors } |z_M - z_A| = r$$

$$\Rightarrow |z - (1 + i)| = r = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z'}{i} - (1 + i) \right| = r \text{ car } z' = iz$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z' - i(1 + i)}{i} \right| = r$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z' - (1 - i)}{i} \right| = r$$

$$\Rightarrow |z' - (1 - i)| = r \text{ car } |i| = 1$$

(Γ') est le cercle de centre O' d'affixe $1 - i$ et de rayon $r' = \sqrt{2}$ (0,5pt)

$$3) z_B = 2 + 2i$$

$$z_{B'} : B' = f(B)$$

a) Montrons que $(AB) \perp (A'B')$

$$(AB) \perp (A'B') \text{ si } \frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} \in i\mathbb{R}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{2 + 2i - 1 - i\sqrt{2} - i}{2i - 2 + 1 - (1 + i\sqrt{2})i}$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{1 - i\sqrt{2} + i}{-1 + i - i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(1 - i\sqrt{2} + i)[-1 - (1 - i\sqrt{2})i]}{(-1)^2 - [(1 - i\sqrt{2})i]^2}$$

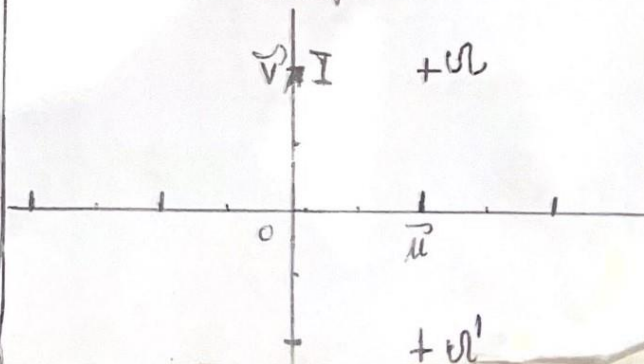
$$= \frac{-1 + i\sqrt{2} - 1 - i + i\sqrt{2} - 1 - 3 + 2i\sqrt{2}}{1 + 3 - 2i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(-4 + 2i\sqrt{2})i}{4 - 2i\sqrt{2}} = -\frac{i(4 - 2i\sqrt{2})}{4 - 2i\sqrt{2}}$$

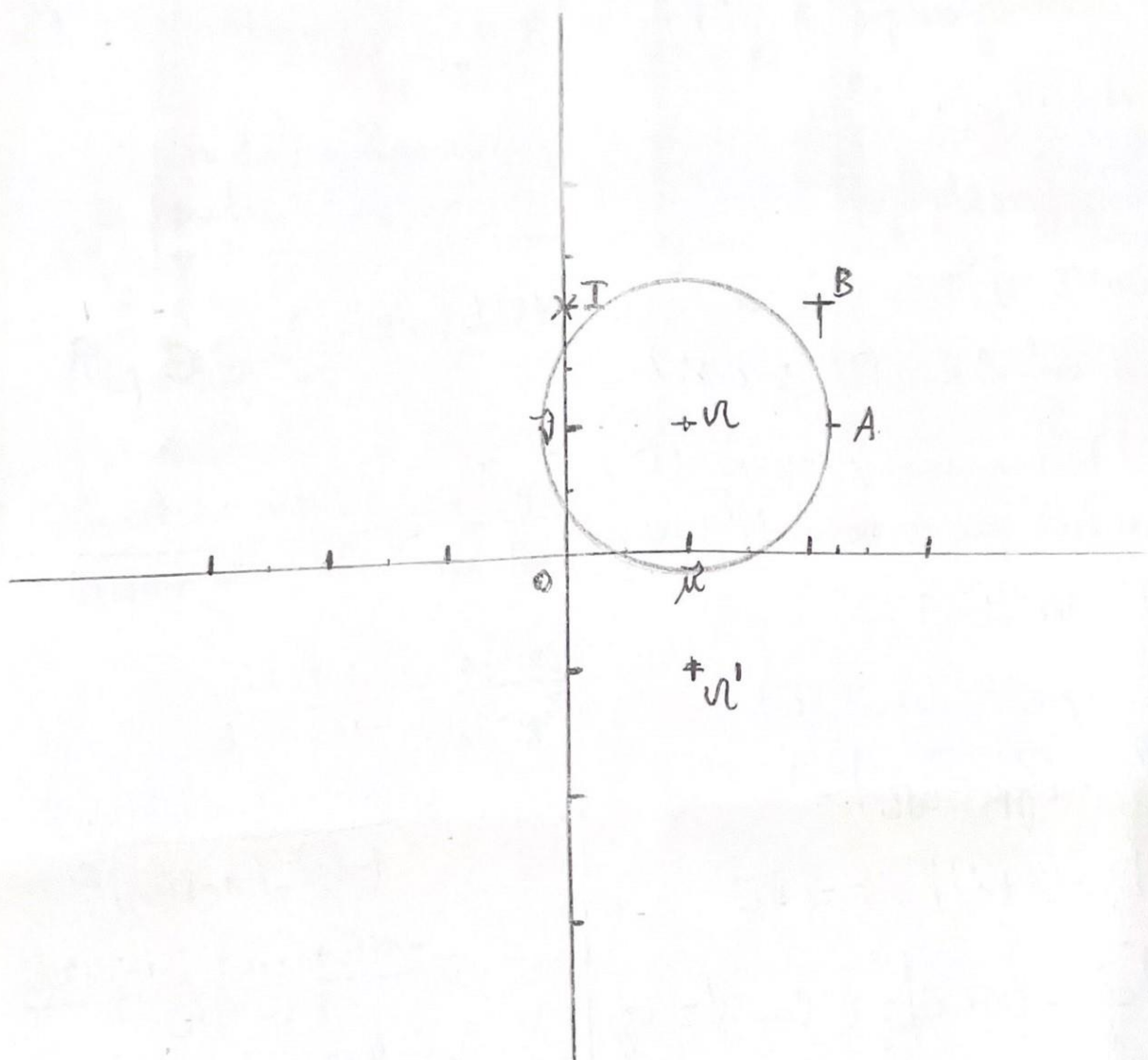
$$\frac{z_B - z_A}{z_{B'} - z_{A'}} = -i \in i\mathbb{R} \text{ d'où}$$

$$(AB) \perp (A'B') \quad (0,5)$$

b) $(AB) \cap (A'B') = \{C\}$
nature de $OACA'$



④



Exercice 2

5

$$(U_n) = \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Etude graphique de (U_n)

la fonction f définissant la suite (U_n) est : $f(x) = \frac{2x-16}{x-6}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-6 \neq 0\}$$

$$D_f =]-\infty, 6[\cup]6, +\infty[$$

f est dérivable sur D_f en tant que fonction rationnelle et sa dérivée est $f'(x) = \frac{4}{(x-6)^2}$

• signe de $f'(x)$:

$$\frac{4}{(x-6)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

• sens de variation.

f est strictement croissante sur $]-\infty, 6[$ et sur $]6, +\infty[$.

* limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

interprétation: la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{2x-16}{x-6} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{2x-16}{x-6} = -\infty$$

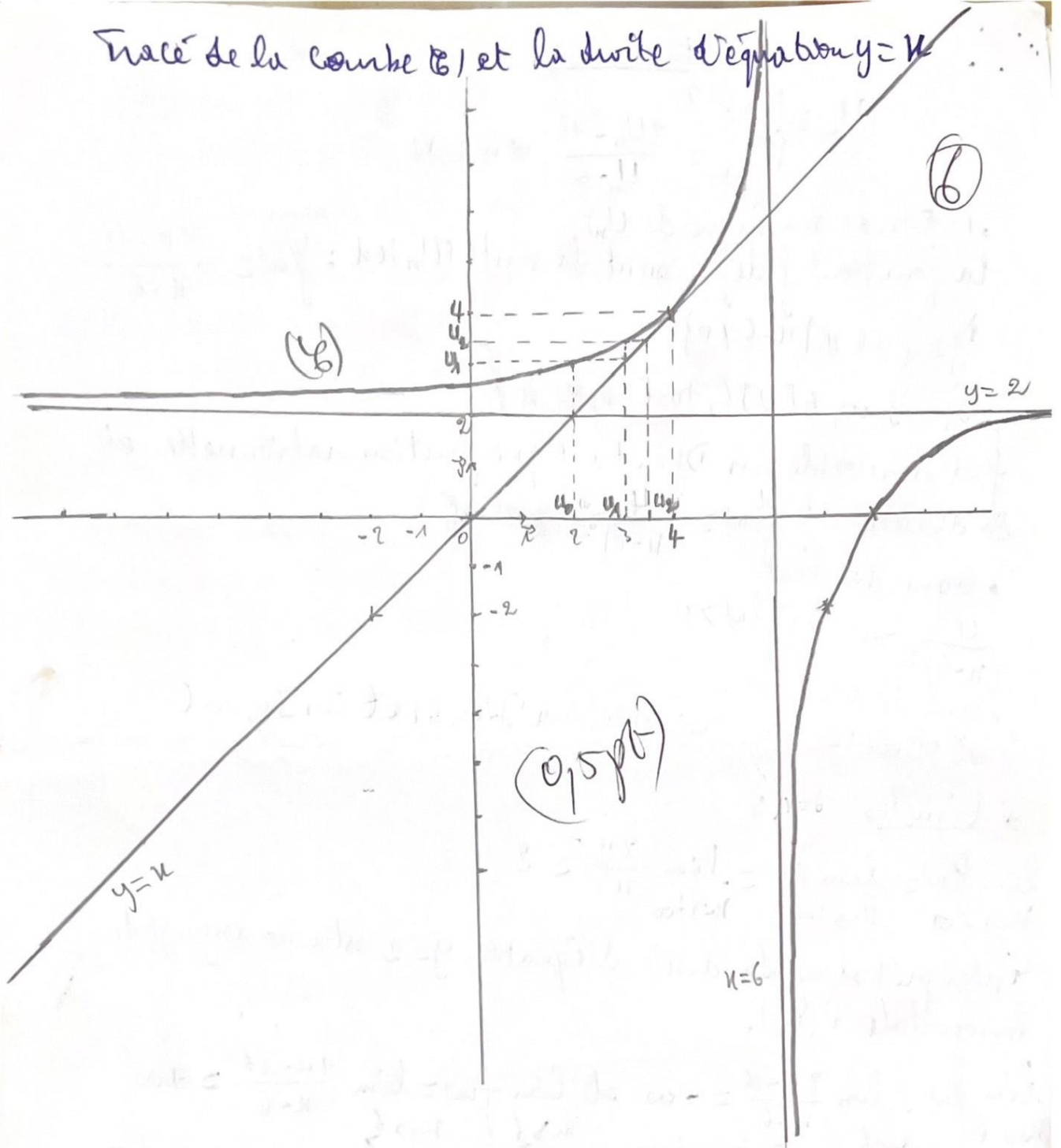
interprétation: la droite d'équation $x=6$ est une asymptote verticale à (C_f) .

Tableau de variations

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

(15/11)

Tracé de la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $y=x$...



$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 16}{u_n - 6}; \quad u_1 = 3; \quad u_2 = \frac{10}{3}$$

Conclusion: la construction graphique des termes de la suite (u_n) laisse penser qu'elle est croissante et converge vers 4.

2-a) Démontrons que (U_n) est majorée par 4.

Raisonnons par récurrence:

• $U_0 = 2$ et $2 \leq 4$ donc $U_0 \leq 4$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \leq 4$ et démontrons que $U_{n+1} \leq 4$.

$$U_n \leq 4 \leq 6$$

$$\Rightarrow f(U_n) \leq f(4)$$

f est croissante sur $] -\infty; 6[$

$$f(4) = \frac{8-16}{4-6} = 4; \text{ donc } U_{n+1} \leq 4 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 4$$

D'où (U_n) est majorée par 4. (0,25 pt)

b) Démontrons que la suite (U_n) est strictement croissante.

Raisonnons par récurrence:

• on a: $U_0 = 2$; donc $U_0 < U_1$
 $U_1 = 3$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n < U_{n+1}$ et montrons que $U_{n+1} < U_{n+2}$

$$U_n < U_{n+1} \leq 4 < 6 \Rightarrow f(U_n) < f(U_{n+1}) \Rightarrow U_{n+1} < U_{n+2}.$$

f est croissante sur $] -\infty; 6[$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$ d'où (U_n) est strictement croissante. (0,25 pt)

c) D'adivisons - en que (U_n) est convergente et précisons sa limite.

De ce qui précède (U_n) est majorée et croissante d'où elle est convergente. (0,25 pt)

Soit l la limite de (U_n) . on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$ et $f(l) = l$

$$\Leftrightarrow \frac{8l-16}{l-6} = l \Leftrightarrow l^2 - 8l + 16 = 0 \Leftrightarrow (l-4)^2 = 0 \Leftrightarrow l = 4$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 4$. (0,25 pt)

$$3) (V_n): V_n = \frac{1}{U_n - 4}$$

a) Démontrons que (V_n) est arithmétique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} - 4} - \frac{1}{U_n - 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\left(\frac{2U_n - 16}{U_n - 6}\right) - 4} - \frac{1}{U_n - 4}$$

$$= \frac{U_n - 4}{-2(U_n - 4)} = -\frac{1}{2}$$



$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{2}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{6-4} = -\frac{1}{2}$. (0,5 pt)

b) V_n et U_n en fonction de n .

(V_n) étant arithmétique:

$$V_n = V_0 + (n-0)r = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = V_n \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$V_n = \frac{1}{U_n - 4} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} + 4 = \frac{4n+2}{n+1} = U_n \quad (0,25 \text{ pt})$$

c) Montrons que (U_n) converge et déterminons sa limite.

de ce qui précède $U_n = \frac{4n+2}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{n} = 4 \quad (0,25 \text{ pt})$$

D'où (U_n) est convergente et a pour limite 4. (0,25 pt)

7

Problème

9

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{ne^x + 1} \text{ sur } [0; +\infty[$$

Partie A

$$g(x) = x + 2 - e^x \text{ sur } [0; +\infty[$$

1) Variations de g .

- g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et a pour fonction dérivée :

$$g'(x) = 1 - e^x \quad (0,25 \text{ pt})$$

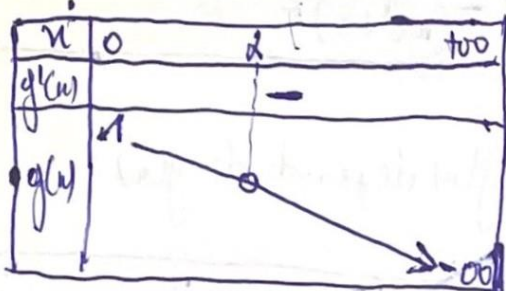
• signe de $g'(x)$

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq 0 \Leftrightarrow -e^x \leq -1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

• sens de variations

g est décroissante sur $[0; +\infty[$ (0,25 pt)

Tableau de variation



• limites

$$g(0) = 0 + 2 - e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad (0,25 \text{ pt})$$

2. a) $\forall x \in [0; +\infty[$ g est continue et décroissante, elle réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $]-\infty; 1]$. Or $0 \in]-\infty; 1]$, il existe donc un réel α et un réel tel que $g(\alpha) = 0$. (0,25 pt)

b) Montrons que $1,14 < \alpha < 1,15$

$$g(1,14) = 1,14 + 2 - e^{1,14} = 3,14 - 3,12 = 0,02$$

$$g(1,15) = 1,15 + 2 - e^{1,15} = 3,15 - 3,16 = -0,01$$

$$g(1,14) \times g(1,15) < 0 \text{ d'où } \alpha \in]1,14; 1,15[\quad (0,25 \text{ pt})$$

3) $\forall n \in [0, 2]; g(n) \in [0, 1] \Rightarrow g(n) \geq 0$ (0,25pt)
 $\forall n \in [2, +\infty[; g(n) \in]-\infty, 0] \Rightarrow g(n) \leq 0$ (0,25pt)

(10)

Partie B

1-a) Montrons que $f'(n) = \frac{e^n g(n)}{(ne^n + 1)^2}$

f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et sa dérivée est :

$$f'(n) = \frac{(e^n - 1)'(ne^n + 1) - (ne^n + 1)'(e^n - 1)}{(ne^n + 1)^2} = \frac{e^n(ne^n + 1) - (e^n + ne^n)(e^n - 1)}{(ne^n + 1)^2}$$

$$f'(n) = \frac{ne^{2n} + e^n - (e^{2n} - e^n + ne^{2n} - ne^n)}{(ne^n + 1)^2} = \frac{ne^{2n} + e^n - e^{2n} + e^n - ne^{2n} + ne^n}{(ne^n + 1)^2}$$

$$f'(n) = \frac{2e^n}{(ne^n + 1)^2} = \frac{e^n(n+2 \cdot e^{-n})}{(ne^n + 1)^2}$$

or $g(n) = n+2 - e^n$ donc $f'(n) = \frac{e^n g(n)}{(ne^n + 1)^2}$ (1pt)

b) Variations de f .

• Signe de $f'(n)$
 $\forall n \in \mathbb{R}; \frac{e^n}{(ne^n + 1)^2} > 0$; le signe de $f'(n)$ dépend de $g(n)$.

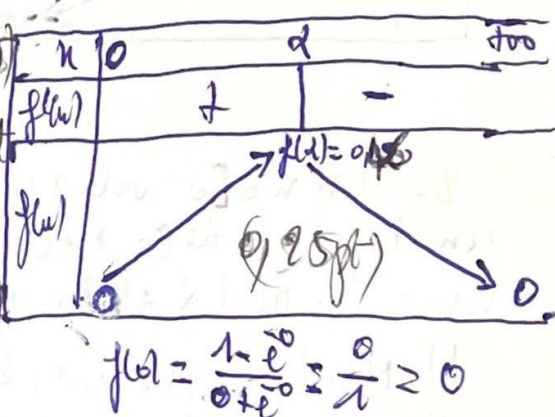
$\forall n \in [0, 2]; g(n) \geq 0 \Rightarrow f'(n) \geq 0$ (0,25pt)

$\forall n \in [2, +\infty[; g(n) \leq 0 \Rightarrow f'(n) \leq 0$ (0,25pt)

• Sens de variations

$\forall n \in [0, 2]; f$ est croissante (0,25pt)

$\forall n \in [2, +\infty[; f$ est décroissante (0,25pt)



2-a) Montrons que $f(n) = \frac{1 - e^{-n}}{n + e^{-n}}$

$$f(n) = \frac{e^n - 1}{ne^n + 1} = \frac{e^n(e^{-n} - e^{-2n})}{e^n(ne^n + 1)} = \frac{1 - e^{-n}}{n + e^{-n}}$$

donc $f(n) = \frac{1 - e^{-n}}{n + e^{-n}}$ (0,5pt)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-n}}{n+e^{-n}} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} 1-e^{-n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n+e^{-n} = \infty \end{cases}$$

Interprétation: la droite

d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale à f . (0,25pt)

3. a) Montrons que $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x+2-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = x+2$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} = \frac{x+2-1}{x(x+2)+1} = \frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} \quad (1pt)$$

b) Encadrement de $f(x)$

$$1,14 < x < 1,15 \quad \left| \quad \frac{1}{2,15} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2,14} \Rightarrow 0,467 < f(x) < 0,472 \right.$$

$$2,14 < x+1 < 2,15 \quad \left| \quad \text{donc} \quad 0,467 < f(x) < 0,472 \quad (0,25pt) \right.$$

4. Equation de (T) en 0

$$(T): y = f(0)(n-0) + f(0) \Rightarrow (T): y = 1(n-0) + 0 \Rightarrow (T): y = n \quad (0,25pt)$$

5. a) Montrons que $f(n) - n = \frac{(n+1)u(n)}{n e^n + 1}$

$$f(n) - n = \frac{e^n - 1}{n e^n + 1} - n = \frac{e^n - 1 - n e^n}{n e^n + 1} = \frac{-n^2 e^n + e^n - n - 1}{n e^n + 1} = \frac{(n+1)(e^n - n e^{n-1})}{n e^n + 1}$$

$$\text{or } u(n) = e^n - n e^{n-1} \quad \text{donc } f(n) - n = \frac{(n+1)u(n)}{n e^n + 1} \quad (1pt)$$

b) Sens de variations de u

u est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivable et sa dérivée:

$$u'(n) = (e^n - n e^{n-1})' = e^n - e^n - n e^{n-1} = -n e^{n-1} \quad (0,25pt)$$

• signe de $u(n)$

$\forall n \in [0; +\infty[; ne^n > 0 \Leftrightarrow -ne^n < 0 \Leftrightarrow u(n) < 0$ (0,25pt)

• sens de variation

u est décroissante sur $[0; +\infty[$ (0,25pt)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n \cdot ne^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n (1 - n - \frac{1}{e^n}) = -\infty$ (0,25pt)

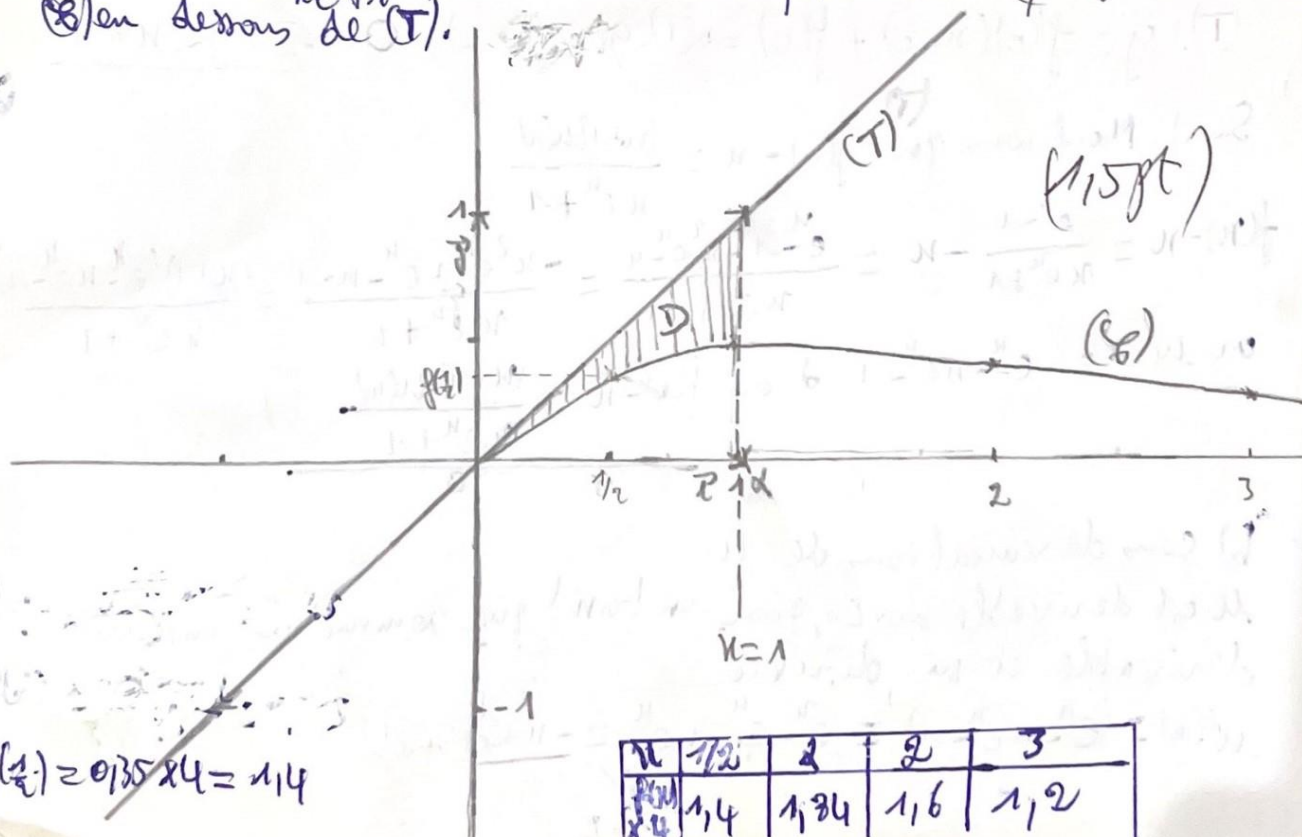


• signe de $u(n)$:

$\forall n \in [0; +\infty[; u(n) \in]-\infty; 0] \Leftrightarrow u(n) < 0$ (0,25pt)

G) Tracé de (E) et (T)

Position relative de (E) et (T): $f(n) - u(n) = \frac{(n+1)u(n)}{ne^n + 1}$
 $\forall n \in [0; +\infty[; \frac{n+1}{ne^n + 1} > 0$ et $u(n) < 0 \Rightarrow f(n) - u(n) < 0$ (0,25pt)
 (E) en dessous de (T).



$f(1) = 0,35 \times 4 = 1,4$

n	1/2	1	2	3
$\frac{f(n)}{n \times 4}$	1,4	1,34	1,6	1,2

Partie c

(13)

1) Primitives de f
 f est continue sur $[0; +\infty[$, elle admet une primitive sur tout intervalle.

$$f(u) = \frac{1 - e^{-u}}{u + e^{-u}} = \frac{(u + e^{-u})'}{u + e^{-u}} \Leftrightarrow F(u) = \ln(u + e^{-u}) + h \quad (h \in \mathbb{R})$$

$$1 + e^{-u} > 0 \Leftrightarrow \underline{F(u) = \ln(u + e^{-u}) + h} \quad (h \in \mathbb{R}) \quad (1 \text{ pt})$$

2) L'aire A du domaine D .

$$A = \int_0^1 [u - f(u)] du \text{ u.a}$$

$$A = \int_0^1 \left[u - \frac{1 - e^{-u}}{u + e^{-u}} \right] du \text{ u.a}$$

$$A = \left[\frac{1}{2} u^2 - \ln(u + e^{-u}) \right]_0^1 \times 16 \text{ cm}^2$$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) - 0 \right) \times 16 \text{ cm}^2$$

$$A = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \times 16 \text{ cm}^2$$

$$A = \left(\frac{3 - 2}{6} \right) \times 16 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{16}{6} \text{ cm}^2$$

$$\boxed{A = \frac{8}{3} \text{ cm}^2} \quad (1 \text{ pt})$$