

Proportion de corrigé BAC A

①

Exercice 1

1. $(2n+1)(n-8) = 2n^2 - 15n - 8$ (1 pt)

$2n^2 - 15n - 8 = 0 \Rightarrow (2n+1)(n-8) = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$ ou $n = 8$

$S_R = \{-\frac{1}{2}, 8\}$ (0,5 pt)

2. a) $(\ln n^2 + 1)(\ln n - 8) = 0$

$D_V = \{n \in \mathbb{R} \mid n^2 \neq 0 \text{ et } n > 0\}$

$n^2 \neq 0 \Rightarrow n \neq 0 \Rightarrow n \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$n > 0 \Rightarrow n \in]0, +\infty[$

$D_V = (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[) \cap]0, +\infty[=]0, +\infty[$

$\ln n^2 + 1 \geq 0$ ou $\ln n - 8 \geq 0 \Rightarrow \ln n^2 \geq -1$ ou $\ln n \geq 8$

$\Rightarrow 2 \ln n \geq -1$ ou $\ln n \geq 8$

$\Rightarrow \ln n \geq -\frac{1}{2}$ ou $\ln n \geq 8$

$\Rightarrow e^{\ln n} \geq e^{-\frac{1}{2}}$ ou $e^{\ln n} \geq e^8$

$n \geq e^{-\frac{1}{2}} \in D_V$ ou $n \geq e^8 \in D_V$

$S_R = \{e^{-\frac{1}{2}}, e^8\}$ (0,5 pt)

b) $\ln[n(2n-15)] = 3 \ln 2$

$D_V = \{n \in \mathbb{R} \mid n(2n-15) > 0\}$

$D_V =]-\infty, 0[\cup]\frac{15}{2}, +\infty[$

$\ln[n(2n-15)] = 3 \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(2n^2 - 15n) = \ln 8$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 15n = 8$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 15n - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (2n+1)(n-8) = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2} \in D_V$ ou $n = 8 \in D_V$

$S_R = \{-\frac{1}{2}, 8\}$ (0,5 pt)

i posons $n=0$ et $2n-15=0 \Rightarrow n = \frac{15}{2}$

n	$-\infty$	0	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
n	-	+	+	+
$2n-15$	-	-	+	+
$n(2n-15)$	+	-	+	+

$$c) \ln x + \ln(2x-15) = 3 \ln 2$$

②

$$D_V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } 2x-15 > 0\}$$

$$x > 0 \text{ et } x > \frac{15}{2} \Leftrightarrow D_V =]\frac{15}{2}; +\infty[$$

$$\ln x + \ln(2x-15) = 3 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln[x(2x-15)] = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin D_V \text{ ou } x = 8 \in D_V$$

$$S_M = \{8\} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$3. a) 2e^x - 15e^x - 8 = 0$$

$$D_V = \mathbb{R}$$

$$\text{soit } X = e^x$$

$$\text{on a: } 2X^2 - 15X - 8 = 0$$

$$\Delta = 11, X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = 8$$

$$X > 0 \Leftrightarrow X = 8$$

$$\Leftrightarrow e^x = 8$$

$$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 8$$

$$S_M = \{\ln 8\} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$b) \begin{cases} x-y = 1 \\ 2e^x - 15e^y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ 2e^{y+1} - 15e^y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+1 \\ 2e^y - 15e^y = 8 \end{cases}$$

$$\text{On 3. a) } x = \ln 8$$

$$y = x-1 \Leftrightarrow y = \ln 8 - 1$$

$$S_{M \times M} = \{(\ln 8, \ln 8 - 1)\} \quad (0,5 \text{ pt})$$

Exercice 2

$$(V_n): \begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 3 \end{cases}$$

$$1) V_1 = \frac{1}{2}V_0 + 3 \Leftrightarrow V_1 = 3; V_2 = \frac{1}{2}V_1 + 3 = \frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow V_2 = \frac{9}{2} \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$V_3 = \frac{1}{2}V_2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} + 3 \Leftrightarrow V_3 = \frac{21}{4} \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$U_2 = 6 - V_2 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$2) U_n = 6 - V_n$$

$$a) U_0 = 6 - V_0 = 6; U_1 = 6 - V_1 = 6 - 3 = 3; U_2 = 6 - V_2 = 6 - \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow U_3 = \frac{3}{4}$$

$$b) U_{n+1} = f(U_n)$$

$$U_{n+1} = 6 - V_{n+1} = 6 - (\frac{1}{2}V_n + 3) = 3 - \frac{1}{2}V_n \Leftrightarrow U_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}U_n \quad (0,5 \text{ pt})$$

Déterminons que (U_n) est géométrique

$$U_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}V_n = \frac{1}{2}(6 - V_n) \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \quad (0,25)$$

Donc (U_n) est une suite géométrique que l'on a $\frac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 6 \cdot (0,25)$

c) U_n en fonction de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}; U_n = U_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (0,25)$$

Détermination de V_n en fonction de n

$$U_n = 6 - V_n \Leftrightarrow V_n = 6 - U_n = 6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow V_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad (0,25)$$

d) limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (0,25) \quad \text{Car } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (6 - U_n) = 6 - \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 6 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 6 \quad (0,25)$$

Problème

1- a) $A(x) = 2x^2 - 7x + 5$ 1pt, $B(x) = 2x^2 - 12x + 16$ 1pt

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 \neq 0\} \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ 1pt

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ 0,25

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ 0,25

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	ϕ	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x^2 - 7x + 5 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0^- \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x^2 - 7x + 5 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0^+ \end{cases}$ 0,25

Conséquence: la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à f (6) 0,5

$$c) 2n-1 + \frac{2}{n-3} = \frac{(2n-1)(n-3)+2}{n-3} = \frac{2n^2-7n+5}{n-3} = f(n) \quad (4)$$

d) f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle et $\forall n \in D$

$$f'(n) = 2 - \frac{2}{(n-3)^2} = \frac{2(n-3)^2 - 2}{(n-3)^2} = \frac{2[(n-3)^2 - 1]}{(n-3)^2} = \frac{2(n-2)(n-4)}{(n-3)^2} \quad 0,5$$

$\forall n \in D$, $(n-3)^2 > 0$, le signe de $f'(n)$ dépend du numérateur

$$f'(n) = 0 \quad \forall n = 2 \text{ et } n = 4$$

$$f'(n) > 0 \quad \forall n \in]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[\quad 0,25$$

$$f'(n) < 0 \quad \forall n \in]2; 3[\cup]3; 4[\quad 0,25$$

Sens de variations

f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]4; +\infty[\quad 0,25$

f est strictement décroissante sur $]2; 3[$ et sur $]3; 4[\quad 0,25$

Tableau de variations

n	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
$f'(n)$	+	0	-	0	+
$f(n)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\searrow$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$ $\searrow$ 9	$\nearrow$ $+\infty$	

1pt

$$e) \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) - (2n-1)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-3} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} [f(n) - (2n-1)] = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{2}{n-3} = 0$$

On déduit que la droite d'équation $y = 2x-1$ est une asymptote oblique à (f) . $0,25$

f) les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses sont les solutions du système $\begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases}$ (5)
 $y=0$ et $f(x)=y \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-7x+5}{x-3} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+5=0$
 $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(5) = 49 - 40 = 9 = 3^2$

$$x_1 = \frac{7-3}{4} = 1; x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$(C) \cap (Ox) = \{(1,0); (\frac{5}{2},0)\} \quad 1 \text{ pt}$$

les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées sont les solutions du système: $\begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases}; f(0) = -\frac{5}{3}$
 $(C) \cap (Oy) = \{(0, -\frac{5}{3})\} \quad 0,5$

g) Trace de la courbe (C). (page suivante 1,5 pt)

h) les coordonnées du point I, intersection des asymptotes, vérifient les équations de ces asymptotes.

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \times 3 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow I(3;5) \quad 0,5$$

Montrons que I est centre de symétrie pour (C)

$I(3;5)$ est centre de symétrie pour (C) si $\forall x \in D; (2 \times 3 - x) \in D$ et

$$f(2 \times 3 - x) + f(x) = 2 \times 5$$

$$\forall x \in D; (6-x) \in D$$

$$f(6-x) + f(x) = 2(6-x) - 1 + \frac{2}{6-x-3} + 2x - 1 + \frac{2}{x-3}$$

$$= 12 - 2x - 1 + \frac{2}{3-x} + 2x - 1 + \frac{2}{x-3}$$

$$= 10 + \frac{2}{-(3-x)} + \frac{2}{x-3} = 10 - \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x-3} = 10 = 2 \times 5$$

$f(2x_I - x) + f(x) = 2 \times y_I$ d'où $I(3;5)$ est un centre de symétrie pour (C).
 0,5

Autrement

soit un point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$. on a alors les relations
 $\begin{cases} x = 3 + X \\ y = 5 + Y \end{cases}$

En remplaçant x et y dans $y = f(x)$, équation de (E) dans le repère $(0; x; y)$, on obtient une équation de (E) dans le repère $(x; x; y)$. (6)

$$y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y+5 = 2(x+3)-1 + \frac{2}{x+3-3} \text{ d'où } y = 2x + \frac{2}{x} = F(x).$$

$y = F(x)$ est une équation de (E) dans le repère $(x; x; y)$.

$$D_F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \Leftrightarrow D_F = \mathbb{R}^*$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } F(-x) = -(2x + \frac{2}{x}) = -F(x).$$

F est donc une fonction impaire; sa courbe représentative (E) admet $\mathbb{I}$ comme centre de symétrie.

2. Soit h la fonction telle que $h(u) = \frac{-2u^2 + 7u - 5}{|u-3|}$

$$|u-3| = \begin{cases} -(u-3) & \text{si } u \in]-\infty; 3[\\ u-3 & \text{si } u \in]3; +\infty[\end{cases}$$

$$h(u) = \begin{cases} \frac{-(2u^2 - 7u + 5)}{-(u-3)} = \frac{2u^2 - 7u + 5}{u-3} = f(u) & \text{si } u \in]-\infty; 3[\quad 0,5 \\ \frac{-(2u^2 - 7u + 5)}{u-3} = -f(u) & \text{si } u \in]3; +\infty[\quad 0,5 \end{cases}$$

On en déduit que $\forall u \in]-\infty; 3[$ (E) et (F) sont confondues 0,25
et $\forall u \in]3; +\infty[$; (E) et (F) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. 0,75

Tracé des courbes (Page suivante)

x	-3	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$							

x	0	2	2,5	3,5	4	5
$f(x)$	$-\frac{5}{3}$	1	0	10	9	10

⑦

